

Chapitre n° 1 : nombres complexes, point de vue algébrique

Préambule

L'équation $x + 5 = 2$ a ses coefficients dans \mathbb{N} mais pourtant sa solution $x = -3$ n'est pas un entier naturel. Il faut ici considérer l'ensemble plus grand \mathbb{Z} des entiers relatifs.

$$\mathbb{N} \xrightarrow{x+5=2} \mathbb{Z} \xrightarrow{2x=-3} \mathbb{Q} \xrightarrow{x^2=\frac{1}{2}} \mathbb{R} \xrightarrow{x^2=-\sqrt{2}} \mathbb{C}$$

De même l'équation $2x = -3$ a ses coefficients dans \mathbb{Z} mais sa solution $x = -\frac{3}{2}$ est dans l'ensemble plus grand des rationnels \mathbb{Q} . Continuons ainsi, l'équation $x^2 = \frac{1}{2}$ à coefficients dans \mathbb{Q} , a ses solutions $x_1 = +1/\sqrt{2}$ et $x_2 = -1/\sqrt{2}$ dans l'ensemble des réels \mathbb{R} . Ensuite l'équation $x^2 = -\sqrt{2}$ à ses coefficients dans \mathbb{R} et ses solutions $x_1 = +i\sqrt{\sqrt{2}}$ et $x_2 = -i\sqrt{\sqrt{2}}$ dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} .

Ce processus est-il sans fin ? Non !

Les nombres complexes sont en quelque sorte le bout de la chaîne car le théorème de d'Alembert-Gauss assure : « Pour n'importe quelle équation polynomiale $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ où les coefficients a_i sont des complexes (et tout réel est un complexe), alors les solutions x_1, \dots, x_n sont dans l'ensemble des nombres complexes ».

Outre la résolution d'équations, les nombres complexes s'appliquent à la trigonométrie, à la géométrie (comme nous le verrons dans le chapitre suivant), mais aussi à l'électronique, à la mécanique quantique, la physique des ondes, etc.

Bref, ce sont les nombres complexes qui auraient pu s'appeler les nombres naturels !

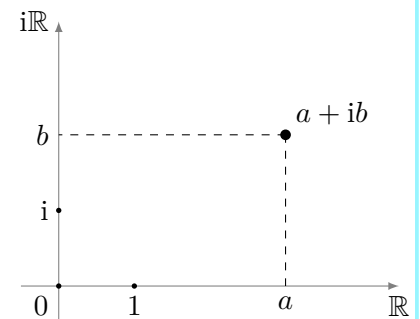
1 L'ensemble des nombres complexes

Définition 1: L'ensemble \mathbb{C}

Il existe un ensemble noté \mathbb{C} , appelé **ensemble des nombres complexes**, qui possède les propriétés suivantes:

- \mathbb{C} contient l'ensemble des nombres réels : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- il existe un nombre complexe, noté i tel que $i^2 = -1$.
- l'addition et la multiplication des nombres complexes suivent les mêmes règles qu'entre nombres réels, en remplaçant i^2 par (-1) .
- tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$, où x et y sont des nombres réels.

Cette forme s'appelle la **forme algébrique** du nombre complexe z .



Remarque 1: Soit deux nombres complexes z et z' de formes algébriques respectives $a + ib$ et $a' + ib'$.

L'unicité de la forme algébrique :

- signifie que $z = z'$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$
 - permet de donner un nom aux nombres réels a et b (puisque'ils sont uniques pour un complexe z donné) : a s'appelle la **partie réelle** de z (notée $\text{Re}(z)$) et b la **partie imaginaire** de z (notée $\text{Im}(z)$)
- où $a + ib$ et $a' + ib'$ sont les formes algébriques respectives de z et z' .

Exemple 1 (Simplifier):

$$(2 + i)(1 - i) =$$

$$(1 + i)^2 =$$

$$i^{2023} =$$

$$(3 - 2i)(3 + 2i) =$$

$$\operatorname{Re}(i - 1) =$$

$$\operatorname{Im}(3 - 2i) =$$

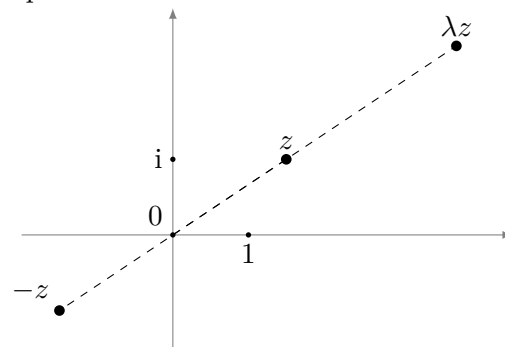
2 Opérations entre nombres complexes

Définition 2: vocabulaire

Soit un nombre complexe z de forme algébrique $z = a + ib$.

- L'opposé de z est $-z = (-a) + i(-b) = -a - ib$.
- La multiplication par un réel $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda z = (\lambda a) + i(\lambda b)$.

En particulier, 1 était l'élément neutre pour la multiplication entre nombres réels; et 1 s'avère aussi l'élément neutre pour la multiplication entre nombres complexes.



- L'inverse: si $z \neq 0$, il existe un unique $z' \in \mathbb{C}$ tel que $zz' = 1$.

Pour la preuve, considérons $z = a + ib$ non nul (donc a et b sont deux nombres réels non tous deux nuls; phrase différente de « a et b sont deux nombres réels tous deux non nuls » : le français n'est pas commutatif!)

$$\text{Alors, } \frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$$

- La division : $\frac{z}{z'}$ est le nombre complexe $z \times \frac{1}{z'}$.
- Propriété d'intégrité : si $zz' = 0$ alors $z = 0$ ou $z' = 0$ (se démontrera facilement après introduction du module d'un nombre complexe dans le chapitre suivant)
- Puissances : $z^2 = z \times z$, $z^n = z \times \cdots \times z$ (n facteurs, $n \in \mathbb{N}$).

$$\text{Par convention } z^0 = 1 \text{ et } z^{-n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n}.$$

Propriété 1: somme des puissances successives d'un complexe

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ différent de 1, on a :

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Preuve 1: Notons $S = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$

$$S \times (1 - z) = S - zS = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n - z(1 + z + z^2 + \cdots + z^n) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n - (z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n+1})$$

$$\text{d'où } S \times (1 - z) = 1 - z^{n+1} \text{ puis } S = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \text{ (car } z \neq 1)$$

Remarque 2: Il n'y a pas d'ordre naturel sur \mathbb{C} , il ne faut donc jamais écrire $z \geq 0$ ou $z \leq z'$.
Considérez par exemple $z = 1 + 2i$ et $z' = 2 + i$.

Exemple 2: Résoudre $z^2 + (2 - i)z - 2i = 0$ sachant que cette équation admet une solution réelle.

3 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 3: Conjugué

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe sous forme algébrique. Le *conjugué* de z est $\bar{z} = a - ib$.

Propriété 2: Conjugués et opérations

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a :

- ① $z\bar{z} = a^2 + b^2$, en particulier $\boxed{z\bar{z} \in \mathbb{R}_+}$
- ② $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$
- ③ $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- ④ $\overline{\bar{z}} = z$
- ⑤ $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
- ⑥ $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$
- ⑦ $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ où $z' \neq 0$

Preuve 2:

①

$z\bar{z} =$

②

$\frac{1}{2}(z + \bar{z}) =$

③

$\frac{1}{2i}(z - \bar{z}) =$

④

$\overline{\bar{z}} =$

⑤

$\overline{z + z'} =$

⑥

$\overline{z \times z'} =$

$$\bar{z} \times \bar{z'} = (a - ib)(a' - ib') = aa' - bb' - i(ab' + a'b) = \overline{z \times z'}$$

⑦

Pour $z \neq 0$, d'après ⑥ on a : $\bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} =$

d'où $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}.$

Méthode 1 (Simplification d'un quotient complexe): Pour mettre un quotient $\frac{\omega}{z}$ ($z \neq 0$) sous forme algébrique, on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{\omega}{z} = \frac{\omega\bar{z}}{z\bar{z}}$$

Cette méthode s'applique pour résoudre les **équations du premier degré à coefficients complexes**.

Exemple 3:

$$\frac{2 - i}{1 + 2i} =$$

Résoudre $(1 - i)z = 1 + i$.

4 Équations polynomiales de degré 2 à coefficients réels

Théorème 3

Soit a, b, c trois nombres **réels**, avec $a \neq 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$. L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- deux racines complexes, qui sont toutes deux réelles si $\Delta > 0$: $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
- une seule racine complexe, qui est réelle, si $\Delta = 0$: $z_0 = \frac{-b}{2a}$
- deux racines complexes, qui sont conjuguées si $\Delta < 0$: $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \bar{z}_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Preuve 3:

On met le trinôme $P(z) = az^2 + bz + c$ sous forme canonique, puis on factorise :

Exemple 4: Résoudre $z^2 + z + 1 = 0$ dans \mathbb{C} .

5 Équations polynomiales de degré n à coefficients complexes

Théorème 4: factorisation

Un polynôme $P(z)$ de degré $n \geq 1$ et à coefficients complexes admet le nombre complexe α pour racine si et seulement si le polynôme est factorisable par $z - \alpha$.

Preuve 4: Démontrons l'équivalence par double implication.

- ① L'implication réciproque est évidente : si un polynôme $P(z)$ est factorisable par $z - \alpha$ alors α est racine de P .
- ② Pour démontrer l'implication dans le sens direct, nous avons besoin d'un lemme.

Lemme: Soit $z, a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $z^n - a^n = (z - a) \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} a^k$

En effet, en développant, on a : $(z - a) \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} a^k = \left(\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k} a^k \right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} a^{k+1} \right)$.

La deuxième somme peut se réécrire :

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} a^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-(k+1)} a^{k+1} = \sum_{p=1}^n z^{n-p} a^p$$

$$\text{Donc } (z - a) \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} a^k = \left(\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k} a^k \right) - \left(\sum_{k=1}^n z^{n-k} a^k \right) = z^n a^0 - z^0 a^n = z^n - a^n$$

On peut désormais démontrer l'implication dans le sens direct du théorème 4.

Considérons un polynôme $P(z) = \sum_{p=0}^n a_p z^p$ ayant $\alpha \in \mathbb{C}$ pour racine.

On a $P(\alpha) = 0$ donc pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$P(z) = P(z) - P(\alpha) = \left(\sum_{p=0}^n a_p z^p \right) - \left(\sum_{p=0}^n a_p \alpha^p \right) = \sum_{p=1}^n a_p (z^p - \alpha^p)$$

$$P(z) = (z - \alpha) \sum_{p=1}^n a_p \sum_{k=0}^{p-1} z^{p-1-k} a^k = (z - \alpha) \sum_{p=1}^n a_p Q_p(z) \text{ où } Q_p \text{ est un polynôme de degré } p.$$

$a_n \neq 0$ donc il existe un polynôme Q de degré $n - 1$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$

Théorème 5: de d'Alembert-Gauss (admis)

Tout polynôme de degré $n \geq 1$ et à coefficients complexes admet au moins une racine complexe.

Remarque 3: Un polynôme de degré $n = 4$ (par exemple) admet une racine complexe α , donc peut s'écrire comme le produit d'un polynôme de degré 1 ($z - \alpha$) et d'un polynôme de degré 3.

Ce polynôme de degré 3 admet également une racine complexe β (possiblement $\beta = \alpha$), donc peut s'écrire comme le produit d'un polynôme de degré 1 et d'un polynôme de degré 2.

Finalement tout polynôme de degré 4 (resp. n) peut s'écrire comme le produit de n polynômes de degré 1 à **coefficients complexes**.

Cette propriété est fausse si l'on cherche une factorisation par des polynômes de degré 1 à coefficients réels. Par exemple, $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$ et on ne peut pas mieux factoriser dans \mathbb{R} . Mais on peut mieux factoriser dans \mathbb{C} :

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i).$$

En fait, comme annoncé en préambule, un polynôme de degré $n \geq 1$ est toujours factorisable en produit de n polynômes de degré 1 à **coefficients complexes** (possiblement égaux comme dans $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x - 1)$).